Afschuivingen zijn de oplossing

Dr. Roland Ivo van der Veen
Bernoulli Instituut, Wiskunde
Rijksuniversiteit Groningen
Ned. Wis. Dagen, 8 april 2022

We introduceren afschuivingen en laten zien hoe je daar mee parallellepidia in balken kan veranderen. Zo bepalen we hun inhoud en orientatie en geven we een visuele interpretatie van het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen.

1. **Afschuivingen en parallellogrammen in het platte vlak** $\mathbb{R}^2$

(a) De horizontale <u>afschuiving</u> met kracht r is de functie $A^2_r(x,y) = (x+yr, y)$. Ga na dat voor alle $p, q \in \mathbb{R}^2$ en $s \in \mathbb{R}$ geldt $A^2_r(p+q) = A^2_r(p) + A^2_r(q)$ en $A^2_r(sp) = sA^2_r(p)$.

(b) Leg uit waarom functie A^2_r een functie van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ is die de punten op hoogte y precies yr naar rechts schuift. Wat is de inverse van A^2_r?

(c) Voor $p, q \in \mathbb{R}^2$ noemen we $P(p,q)$ het <u>parallellogram</u> met hoekpunten $0, p, q, p+q$ en grondvlak p. Schets de parallellogrammen $P_1 = P((2,0),(-1,3))$ en $P_2 = P((2,0),(0,3))$ en vind r zodat $A^2_r(P_1) = P_2$.

(d) Leg uit waarom $A^2_r(P(p,q)) = P(A^2_r(p), A^2_r(q))$ en waarom dit betekent dat A^2_r een parallellogram naar een ander parallellogram stuurt.

(e) De verticale <u>afschuiving</u> met kracht r is de functie $A^1_r(x,y) = (x, y+xr)$. Ga na dat A^1_r dezelfde eigenschappen heeft als A^2_r behalve dat A^1_r juist de verticale lijn van punten met 1e coordinaat x met xr omhoog schuift.

(f) Schets $P_0 = P((2,1),(-1,2\frac{1}{2}))$ en de parallellogrammen $P_1 = A^1_{\frac{-1}{2}}(P_0)$ en $P_2 = A^2_{\frac{1}{3}}(P_1)$.

(g) Stel de drie afschuivingen A^2_{-1} en A^1_1 en A^1_1 in de juiste volgorde samen zodat je de functie $R(x,y) = (y, -x)$ krijgt. Een rotatie van 90 graden dus.

(h) We zeggen dat $P(p,q)$ een <u>rechthoek</u> is wanneer $p = (a,0)$ en $q = (0,b)$ voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$. Vind $r, s \in \mathbb{R}$ zo dat $A^2_s(A^1_r(Q))$ een rechthoek is, waarbij $Q = P((1,2),(2,1))$.

2. **We vermoeden dat voor ieder parallellogram** $P(p,q)$ **in een rechthoek kan worden veranderd door afschuivingen toe te passen** en wel zo dat het grondvlak naar het grondvlak van de rechthoek gaat.

(a) Stel $q \in \mathbb{R}^2$. Vind een combinatie van afschuivingen die q naar een punt van de vorm $(0,b)$ stuurt.

(b) We beginnen met het geval $P(0, q)$. Laat zien dat de combinatie van afschuivingen die je vond in deel (a) het parallellogram $P(0, q)$ naar de rechthoek $P((0, 0), (0, b))$ stuurt.

(c) Het parallellogram $P(p, q)$ waarbij $p \neq 0$ pakken we als volgt aan: laat zien dat we (eventueel na afschuivingen toe te passen) er van uit mogen gaan dat $p = (a, b)$ waarbij $a \neq 0$. hint: 1g.

(d) Laat zien dat met p als in deel (c) de afschuiving $A^1_{\frac{-b}{a}}$ het parallellogram $P(p, q)$ naar $P((a, 0), q')$ stuurt voor een zekere $q' = (c, d)$.

(e) Als $d \neq 0$, voor welke r stuurt A^2_r het parallellogram $P((a, 0), q)$ naar een rechthoek? Wat doe je als $d = 0$? Rechthoeken mogen er best als een streepje uitzien!

(f) Probeer nu afschuivingen te vinden die de volgende parallellogrammen naar rechthoeken sturt waarbij we grondvlak naar grondvlak moeten sturen: $P((-1, 2), (2, 2))$, $P((0, 1), (1, 0))$, $P((2, 3), (4, 6))$.

(g) We definieeren de georienteerde oppervlakte van een parallellogram Q als ab als we Q met behulp van afschuivingen naar de rechthoek $P((a, 0), (0, b))$ kunnen sturen, waarbij grondvlak naar grondvlak gaat. Is dit een zinnige definitie van oppervlakte en wat is de betekenis van het minteken? (Dit is een moeilijkere opgave met een wat open einde zoals zo vaak in echte wiskunde).

3. **Lineaire vergelijkingen oplossen.** Stel je een parallellogram $P(p, q)$ en een $t \in \mathbb{R}^2$ voor. Het bijbehorende lineaire systeem is de volgende vergelijking met onbekenden x, y:

$$xp + yq = t \tag{1}$$

(a) Hoe ziet het lineaire systeem horend bij een rechthoek er uit?

(b) Neem het parallellogram P_1 uit opgave 1c en $t = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ en ga na dat het bijbehorende lineaire systeem (1) inderdaad een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in de twee onbekenden x en y voorstelt. Los het stelsel op.

(c) Gebruik de afschuiving uit opgave 1c om $P_1 = P((2, 0), (-1, 3))$ naar de rechthoek $P_2 = P((2, 0), (0, 3))$ te sturen.

(d) Pas de afschuiving $A^2_{\frac{1}{3}}$ uit het vorige onderdeel toe aan beide zijden van de vergelijking (1) die bij P_1 en t hoort. Leg uit dat we zo het lineaire systeem krijgen dat hoort bij P_2 en $A^2_{\frac{1}{3}}(t)$. Schrijf dit systeem van twee vergelijkingen op en los het weer op.

(e) Stel nu dat Q een willekeurig parallellogram is en $t \in \mathbb{R}^2$. Laat zien dat een oplossing x, y van het systeem horend bij Q en t ook een oplossing is van het systeem horend bij $A(Q)$ en $A(t)$.

(f) Toon aan dat de twee systemen uit het vorige onderdeel precies dezelfde oplossingen hebben. hint: Als A een afschuiving is dan is zijn inverse ook een afschuiving, zie 1b.

(g) Los het systeem horend bij P_0 uit opgave 1f en $t = (\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ op door het met afschuivingen te reduceren tot een systeem dat hoort bij de rechthoek P_2 uit 1c.

(h) Laat zien dat de georienteerde oppervlakte van parallellogram Q bepaalt hoeveel oplossingen er zijn van het bijbehorende systeem, ongeacht wat t is. Ga eerst na dat dit klopt voor vergelijkingen die bij een rechthoek horen. Pas vervolgens afschuivingen toe om het algemene geval hiertoe te reduceren.

(i) (Voor de kenners) Herken je de toepassing van afschuivingen als het 'vegen met rijen' ofwel Gaussische eliminatie?

(j) (Optioneel) Neem aan dat $ad - bc \neq 0$ en los het stelsel horend bij $P((a, b), (c, d))$ en $t = (u, v)$ op door formules voor x en y te geven in termen van a, b, c, d, u, v.

4. **En nu in n dimensies!** Met de juiste notatie en de juiste generalisaties zijn al onze bovenstaande constructies en redeneringen gelding in $\mathbb{R}^n$, niet alleen wanneer $n = 2$. Met $\mathbb{R}^n$ bedoelen we de verzameling van alle rijtjes van n getallen en we gebruiken de notatie $p = (p^1, p^2, \ldots, p^n)$. Het getal p^j heet de j-de coordinaat van punt $p \in \mathbb{R}^n$ en de j stelt geen macht voor maar een boven-index. Optellen en schalen gaat puntsgewijs net als in $\mathbb{R}^2$.

(a) Het punt in $\mathbb{R}^n$ waarvan alle coordinaten behalve de j-de nul zijn en de j-de coordinaat 1 is noemen we e_j. Schrijf de coordinaten van $e_3 \in \mathbb{R}^5$ op. Ga ook na dat $p = (2, 0, 0, 0, 5, 0, 0, -1) \in \mathbb{R}^8$ bondiger geschreven kan worden als $p = 2e_1 + 5e_5 - e_8$.

(b) Het georienteerde (n-dimensionale) parallellogram[1] opgespannen door de punten $p_1, p_2, \ldots p_n \in \mathbb{R}^n$ is de verzameling $P(p_1, \ldots, p_n)$ die bestaat uit alle punten van de vorm $p_1 z^1 + p_2 z^2 + \ldots p_n z^n$ waarbij de getallen z^j tussen 0 en 1 zitten. Schets $P(2)$ in $\mathbb{R}$ en $P((2, 0), (-1, 3))$ in $\mathbb{R}^2$ en $P((2, 0, 0), (-1, 3, 0), (0, 0, 1))$ in $\mathbb{R}^3$.

(c) Een n-dimenisonaal parallellogram $P(p_1, \ldots, p_n)$ heet een n-dimensionale rechthoek wanneer p_i een veelvoud van e_i is voor elke i. Teken de 3-dimensionale rechthoek $P(2e_1, 3e_2, -e_3)$ in $\mathbb{R}^3$. Ga ook na dat een 2-dimensionale rechthoek precies is wat we in 1h definieerden.

(d) Voor iedere $i \neq j \in \{1, \ldots n\}$ definieeeren we de afschuiving loodrecht op coordinaat i in de j-de richting met kracht $r \in \mathbb{R}$ is de functie $A^i_{j;r} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeven door de formule

$$A^i_{j;r}(v) = v + v^i e_j r \qquad v = (v^1, \ldots v^n) \in \mathbb{R}^n$$

Ga na dat in het geval $n = 2$ geldt dat $A^1_{2;r} = A^1_r$ en wat was onze notatie voor $A^2_{1;r}$?

(e) Schets de rechthoek $U = P(e_1, e_2, e_3)$ en de 3d parallellogrammen $A^1_{2;1}(U)$, en $A^1_{3;1}(U)$. Is $A^2_{3;1}(U)$ hetzelfde als $A^3_{2;1}(U)$?

(f) Zoek een paar afschuivingen die $P((2, 1, 0), (-1, 2\frac{1}{2}, 0), (0, 0, 1))$ in een 3d rechthoek veranderen. hint, zie 1f.

(g) Voor iedere $i \neq j$ maken we een functie $F_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ door

$$F_{ij}(v^1, v^2, \ldots, v^i, \ldots, v^j, \ldots, v^n) = (v^1, v^2, \ldots, v^j, \ldots, -v^i, \ldots, v^n)$$

F_{ij} is een kwartslag draai in de richtingen i en j en laat alle andere coordinaten op hun plaats. Schrijf F_{ij} als een compositie van drie afschuivingen hint, zie 1g.

(h) Vind afschuivingen die $P((-2, 1, 0), (1, 3, 1), (2, -1, 1))$ naar een 3d rechthoek sturen.

(i) Vind afschuivingen die $P(e_1 - e_4, e_3, e_2, e_4)$ naar een 4-dimensionale rechthoek sturen.

(j) Herhaal de argumenten van opgave 2 om te bewijzen dat ieder n-dimensionaal parallellogram met afschuivingen naar een rechthoek te brengen is. Inductie naar de dimensie n.

(k) Leg uit dat de afschuiving $A^i_{j;r}$ de plak met punten v met i-de coordinaat gelijk aan u in de j-de richting opschuift over een afstand ur.

(l) We definieeren de georienteerde inhoud van een n-dimensionaal parallellogram Q als $a_1 a_2 \ldots a_n$ als we Q met behulp van afschuivingen naar de rechthoek $P(a_1 e_1, a_2 e_2, \ldots, a_n e_n)$ kunnen sturen. Gebruik de interpretatie van de afschuiving uit het vorige deel om te beargumenteren dat georienteerde inhoud een zinnig concept is.

[1] ook wel parallellepipedum

(m) Stel je een parallellogram $P(p_1, p_2, \dots p_n)$ en een $t \in \mathbb{R}^n$ voor. Het bijbehorende lineaire systeem is de volgende vergelijking met n onbekenden $z^1, \dots z^n$:

$$z^1 p_1 + z^2 p_2 + \cdots + z^n p_n = t \tag{2}$$

Los het systeem horend bij $P((2,1,0), (-1, 2\frac{1}{2}, 0), (0,0,1))$ en $t = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ op. Let op: z^2 betekent NIET het kwadraat van z.

(n) Gebruik dezelfde argumenten als die uit opgave 3 om aan te tonen dat het systeem behorend bij (n-dimensionaal) parallellogram Q en $t \in \mathbb{R}^n$ dezelfde oplossingen heeft als het systeem horend bij $A(Q)$ en $A(t)$. Hierbij staat A voor een willekeurige afschuiving.

(o) Laat ook zien dat het systeem horend bij Q en t een unieke oplossing heeft als de georienteerde inhoud van Q niet nul is. Wat kan er gebeuren er als die inhoud wel nul is?

(p) Los het systeem horend bij $Q = P(e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_1)$ en $t = (1,1,1,1)$ op door eerst afschuivingen te vinden die Q naar een vierdimensionale rechthoek sturen.

Er valt nog veel meer te ontdekken over afschuivingen (Engels shear transformations). Zo zijn er algemenere afschuivingen $A_{f,s}(v) = v + f(v)s$ voor iedere lineaire functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $s \in \mathbb{R}^n$ met $f(s) = 0$, niet noodzakelijk in de coordinaatrichtingen. Afschuivingen spelen een belangrijke rol in de lineaire algebra, de mechanica (shear stress), meetkunde (de fundamenten van inhoud orientatie en determinant), de uitwendige algebra en de Lie-groepentheorie (onder de naam transvecties en decompositie van $SL(n)$).
Kortom: **afschuivingen zijn de oplossing!**